

文章编号: 1001-764X(2012)10-753-05

用蒙特卡罗法评定测量不确定度

王惠民(南通大学附属医院检验科, 江苏南通, 226001)



作者简介:王惠民, 主任技师, 硕士研究生导师, 现任南通大学公共卫生学院副院长、南通大学附属医院检验科主任。兼任《临床检验杂志》副主编、中华医学会检验分会委员、中国医院协会临床检验管理专业委员会委员、卫生部临床检验标准委员会委员、江苏省医学会临床检验分会副主任委员。承担国家、省级课题多项。获江苏省科技进步二等奖 1 项、三等奖 2 项, 以第一作者或通信作者发表论文 91 篇, 其中 SCI 收录 21 篇, 主编、参编专著与教材 7 部。被评为江苏省有突出贡献的中青年专家。

摘要:测量不确定度评定主要依据《测量不确定度表示指南》(GUM)的基本原理和方法, 蒙特卡罗法(Monte Carlo method, MCM)是除 GUM 方法外研究最多的测量不确定度评定方法。本文介绍 MCM 的发展以及评定测量不确定度的原理和步骤, 并举例说明如何用 MCM 评定测量不确定度。

关键词:测量; 不确定度; 蒙特卡罗法

中图分类号:R446; O213

文献标志码:A

自 1993 年计量学指南联合委员会(JCGM)发布《测量不确定度表示指南》(Guide to the expression of uncertainty in measurement, GUM)以来^[1], 不确定度评定主要依据 GUM 的基本原理和方法。近年来已有一些新方法用于不确定度评定, 而且可以克服 GUM 法的固有缺陷。蒙特卡罗方法(Monte Carlo method, MCM)是除 GUM 方法外研究最多的不确定度评定方法, 也是近年来的研究热点。

1 蒙特卡罗方法评定不确定度的发展

1.1 蒙特卡罗方法的产生 在第二次世界大战中, 美国研制原子弹的“曼哈顿计划”聚集了一批数学家和统计学家, 在进行原子弹中子运输过程的研究中, 提出了一种统计模拟方法, 当时的设计者以欧洲摩纳哥的赌城“蒙特卡罗”命名这种方法, 因为 MCM 是利用随机原理的统计学方法, 正像赌博的随机性一样。MCM 通过建立一个概率模型, 对模型进行随机抽样, 计算所求参数的统计特性。

MCM 由于需要模拟大量的试验, 进行几乎无穷次的计算, 因此 MCM 随着计算机的应用才得以迅速普及。MCM 在医学领域有着非常广泛的应用, PubMed 上已有上千篇论文, 已被用于误差分析和不确定度的计算, 如药物浓度在体内的分布分析、X 线成像的误差分析^[2]、肿瘤基因预测研究^[3]、放射治疗剂量的计算^[4]等。

1.2 蒙特卡罗方法与测量不确定度 GUM 评定不

确定度主要通过建立数学模型、依据不确定度传播律进行合成, 要求测量模型呈线性、输出量呈正态分布, 否则 GUM 方法不能提供准确结果。GUM 方法在计算过程中往往存在一些近似, 这时就需要有新的评定不确定度的方法进行补充。美国 Cranfield 大学的学者 Basil 从 1998 年开始用 MCM 研究海洋和气体流动性的不确定度; 此后 Papadopoulos 等也进行了类似研究。2000 年 Jiang 等^[5]用二种 MCM 方法评定药物浓度和人体积之间的测量不确定度并发现不同评定方法之间有显著差异。2004 年有作者分别在分析化学领域和电力系统用 MCM 进行不确定度的评定时^[6-8], 发现当测量模型复杂或输出量概率分布非正态、明显不对称时, 用 MCM 有更好效果。随后国内、外出现了大量介绍用 MCM 进行不确定度评定的报告, 国内刘智敏于 2005 年就介绍了如何用 MCM 计算不确定度^[9]。

2004 年, JCGM 第一工作小组(WG1)起草发布了《测量不确定度表示指南》的补充文件《分布传播用数值法》^[10], 简称 GUM Sup. 1, 成为第一个用 MCM 进行不确定度评定的指南文件。2008 年由 JCGM 对 GUM Sup. 1 进行了修订, 新版本仍作为 GUM 的补充文件 1, 但更名为《使用蒙特卡罗方法的分布传播》^[11], 简称为 GS1, 更系统地介绍了 MCM 评定不确定度。ISO 指南 35《参考物质定值的一般原则和统计方法》推荐用 MCM 评定参考物质的不确定度^[12]。2012 年版的《分析测量中的定量

不确定度》(QUAM)在 E3 部分介绍了 MCM^[13],认为 MCM 可作为 GUM 法的确认方法。尚未见有将 MCM 评定不确定度用于检验医学的研究。

MCM 是 GUM 方法的重要补充。MCM 用于不确定度的评定已成为目前的研究热点,在我国已得到多项国家自然科学基金资助,新的 MCM 运算方法也不断涌现,如拟蒙特卡罗法、专用于 B 类不确定度评定的 MCM 等。

2 蒙特卡罗方法的原理和步骤

2.1 蒙特卡罗方法基本原理 MCM 实际上是通过建立的数学模型,利用计算机软件,从各输入量的概率分布函数中进行接近无限次数的抽样,传递为输出量的概率分布函数,并计算出输出量的均值、标准不确定度(标准差)和一定概率下的包含区间。MCM 最早用来研究误差。

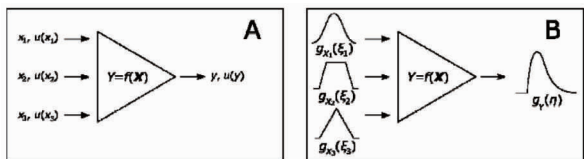


图 1 GUM 方法(A)与 MCM(B)的比较

对于 GUM 方法而言,计算不确定度是将数学模型中各个输入量的不确定度分量按不确定度传播律合成(图 1A)。而 MCM 基于数学模型 $[y=f(x)]$ 中的每个输入量 (x_1, x_2, \dots, x_N) 都不是一个确定的值,存在一定的离散性,亦即它们都有一定的概率分布,这些概率分布可用概率密度函数(probability density function, PDF)表示,即 $g_{xi}(\xi)$ 。输入量可能会有很多种分布类型,这主要取决于数据分布的性质,如图 1B 中 $g_{xi}(\xi)$ $(i=1, 2, 3)$ 分别为正态分布、梯形分布和三角形分布。

从各个输入量的 PDF 中进行 M 次随机抽样, M 可以接近为无穷次,如 10^6 , 将 M 个按数学模型计算得到的输出量 y 值按递增序列排列, 得到输出量 Y 的 PDF $[gY(\eta)]$, 从而可计算出 y 的估计值、标准不确定度和包含区间。输出量的 PDF 有时显示为不对称, 这是由于 $g_{xi}(\xi)$ 模型非线性或 $g_{xi}(\xi)$ 不对称引起的, 如图 1B。

2.2 蒙特卡罗方法的评定步骤

2.2.1 定义被测量 被测量也称输出量(Y)。所定义的被测量应是完整的, 应包含三方面信息, 即系统、成分和量的种类, 如被测量为“血清总蛋白浓度”, “血清”是被测量的系统, 因为总蛋白存在“血

清”这一系统中, “总蛋白”是被分析物, 即系统中的成分, “浓度”是分析物的量的种类, 单位一般用 g/L 。

2.2.2 确定输入量 确定与 Y 相关的输入量 X_1, X_2, \dots, X_N , 包括与测量直接相关的量和间接相关的量。

2.2.3 建立数学模型 当被测量 Y (即输出量) 由 N 个其他量 X_1, X_2, \dots, X_N (即输入量) 通过函数关系 f 来确定时, 则 $Y=f(X_1, X_2, \dots, X_N)$ 。当数学模型中各输入量与测量相关时, 方程式称为测量模型, 式中大写字母表示量的符号, f 为测量函数。

如果输入量 X_i 的估计值为 x_i , 被测量 Y 的估计值为 y , 则测量模型可写为 $y=f(x_1, x_2, \dots, x_N)$

2.2.4 设定各输入量的 PDF 利用实验数据、文献资料、已知的计量学知识、经验及其他有关信息, 为每个独立的 x_i 设定 PDF $[g_{xi}(\xi_i)]$ 。

设定各输入量的 PDF 应至少包括三要素: 输入量的量值(期望)、标准不确定度(误差)和概率分布类型。概率分布类型常见的有正态分布、矩形分布、三角形分布, 主要根据文献和经验确定, 也可通过计算偏度和峰度评估分布类型^[14]。

2.2.5 设定 MCM 试验次数 MCM 试验次数, 或测量模型计算的次数, 即从各输入量的 PDF 中进行抽样的次数, 用 M 表示。在规定的数值容差下, MCM 所需的试验次数跟输出量的 PDF “形状” 及包含概率有关。 M 取值应远大于 $1/(1-P)$, 例如, M 一般应大于 $1/(1-P)$ 的 10^4 倍。若无法确认 M 足够大, 可采用自适应方法选择 M ^[10]。

2.2.6 输入量 PDF 的传递 在 MCM 的实现过程中, 从 N 个输入量 X_i 的 PDF 中抽取 M 个样本值 $x_{i,r}$, 其中 $i=1, 2, \dots, N, r=1, 2, \dots, M$ 。计算模型在每个样本处的值。 PDF 中的抽样可用下式表示:

$$y(x) = \begin{cases} x_{1,1}, x_{1,2}, \dots, x_{1,M} \\ x_{2,1}, x_{2,2}, \dots, x_{2,M} \\ \dots \\ x_{N,1}, x_{N,2}, \dots, x_{N,M} \end{cases}$$

从输入量的 PDF 中抽样和根据数学模型进行相应计算等过程均由计算机软件完成。将 MCM 得到的模型值 y_r ($r=1, 2, \dots, M$) 按递增次序排序。如有必要, 对所有重复的模型值 y_r 进行微小的数值扰动, 使得 y_r ($r=1, 2, \dots, M$) 的集合构成严格的递增序列。只能用微小的数值扰动才可使 y_r 的统计特

性不变。这些均由计算机软件处理,得到输出量的 PDF $[g_y(\eta)]$ 。

2.2.7 结果的计算和报告 根据输出量的 PDF,可计算并报告输出量 Y 的估计值 y 、标准不确定度及一定包含概率(如 $P=0.95$)下的包含区间。

2.3 MCM 的局限性 (1)需要计算机进行复杂的计算,有时计算机需较长的运算时间;(2)由于抽样的随机性,每次的计算结果可能不一致;(3)较难鉴定最大的不确定度分量^[13];(4)不能判断输入量之间的相关性。

应用 MCM 的必要前提就是各输入量之间不相关。而在实际中,复杂的测试系统具有很多输入量,在同一测试系统中,有些输入量不可避免地具有相关性^[15]。在一些情况下,可以忽略相关性,但是如果忽略所有的相关性将使 MCM 失去模拟实际过程的意义,有时还要采取适当的方法在计算中考虑不同输入量的相关性。

同时用 GUM 方法和 MCM 评定不确定度,不失为一种较好的不确定度评定策略。如果 GUM 与 MCM 有显著差异,应认真研究引起差异的原因^[13]。

3 蒙特卡罗方法评定不确定度应用实例

以 IFCC 推荐的 LDH 参考测量程序为例,评定

各输入量及其相关量的不确定度分量后,分别以 GUM 方法和 MCM 计算扩展不确定度及包含区间。

3.1 确定被测量和数学模型 被测量为 LDH 催化活性浓度,测量模型如下:

$$C_{LDH} = \frac{1}{\varepsilon L} \times \frac{V_{R1} + V_{R2} + V_S}{V_S} \times \frac{\Delta A}{\Delta T} \times 10^6 \times \delta(temp) \times \delta(wl) \times \delta(pH) \times \delta(absorb) \times \delta(conc) \times \delta(C_{in}) \times \delta(lot) \times \delta(aging)。$$

C 为被测量,是 LDH 催化活性浓度的测量结果; $\Delta A/\Delta T$ 为每秒吸光度值; V_{R1} 为试剂 1 体积, V_{R2} 为试剂 2 体积, V_S 为为样品体积; ε 为 NADH 摩尔消光系数(630 m²/mol); L 为光径(10 mm)。 $\delta(temp)$ 、 $\delta(wl)$ 、 $\delta(pH)$ 、 $\delta(absorb)$ 、 $\delta(conc)$ 、 $\delta(line)$ 、 $\delta(lot)$ 和 $\delta(aging)$ 分别为温度、波长、pH、吸光度、试剂浓度、线性、试剂批号和试剂老化对测量结果的影响因素(或称误差因素),它们均不明显影响测量结果,在模型中的值均可看成 1,但均具有不确定度,在考虑不确定度合成时,应考虑它们的影响量。

3.2 不确定度分量的细化和确定 共测量 2 份标本,测量 4 d,每天测量 5 次,计算均数与标准误如下:标本 A 为 221.66 U/L 和 0.47 U/L,标本 B 为 366.59 U/L 和 0.85 U/L。各不确定度分量的评定见表 1。

表 1 LDH 参考测量程序测定中主要影响因素的不确定度分量

输入量 X_i	变量参数	不确定度	来源	函数分布类型	评定方法	灵敏系数	相对标准不确定度(%)
A	标本 A	0.466 69 U/L	实验	正态	A		0.210 54
B	标本 B	0.849 57 U/L	实验	正态	A		0.231 94
ε	摩尔消光系数	<1.00%	文献	三角	B		0.408 25
L	光径	0.01 mm	校准证书	矩形	B		0.057 74
V_{R1}	试剂 1 体积	2.537 6 μ L	实验	正态	A		0.127 43
V_{R2}	试剂 2 体积	0.323 0 μ L	实验	正态	A		0.162 25
V_S	样本体积	0.100 3 μ L	实验	正态	A		0.100 42
temp	温度	0.1	校准证书	矩形	B	6.8%/1 $^{\circ}$ C	0.392 61
wl	波长	0.3 nm	校准证书	矩形	B	0.08%/nm	0.013 86
pH	pH	0.01	校准证书	矩形	B	0.09%/0.05pH	0.010 39
absorb	吸光度	0.30%	说明书	矩形	B		0.173 21
conc	试剂浓度	1.50%	文献	矩形	B	0.17%/1%	0.147 23
line	方法线性	0.60%	文献	矩形	B	1	0.346 42
lot	试剂批号	1.5%	文献	矩形	B	1	0.866 05
aging	试剂老化	0.50%	文献	矩形	B	1	0.288 68

3.3 GUM 法计算不确定度 通过实验可得(表 2):温度每变化 1 $^{\circ}$ C、波长每变化 1 nm、pH 每变化 0.05、试剂浓度每变化 1%,LDH 催化活性浓度分别相应地变化 6.8%、0.08%、0.09%、0.17%;其他分量的灵敏系数均看作 100%。

其中,试剂、样本体积偏移已修正,故仅以不精

密度分量计算标准不确定度: $u_{(V_{R1}+V_{R2}+V_S)} = \sqrt{u_{R1}^2 + u_{R2}^2 + u_S^2} = \sqrt{2.5376^2 + 0.323^2 + 0.1003^2} = 2.56004 \mu\text{L}。$

$$\% u_{(V_{R1}+V_{R2}+V_S)} = \frac{2.56004}{1991.44 + 199.08 + 99.88} \times 100\% = 0.1118\%。$$

$$\% u_{V_S} = \frac{0.1003}{99.88} \times 100\% = 0.1004\%$$

$$\% u_V = \sqrt{\% u_{(V_{R1} + V_{R2} + V_S)}^2 + \% u_{V_S}^2} = 0.1503\%$$

$$\begin{aligned} \% u_{cA} = & [\% u_A^2 + \% u_\varepsilon^2 + \% u_L^2 + \% u_V^2 + \% u_{temp}^2 \\ & + \% u_{wl}^2 + \% u_{pH}^2 + \% u_{Absorb}^2 + \% u_{conc}^2 + \% u_{line}^2 + \% \\ & u_{lot}^2 + \% u_{aging}^2]^{1/2} = [0.21054^2 + 0.40825^2 + 0.057 \\ & 74^2 + 0.1503^2 + 0.39261^2 + 0.01386^2 + 0.01039^2 \\ & + 0.17321^2 + 0.14723^2 + 0.34642^2 + 0.86605^2 + \\ & 0.28868^2]^{1/2} = 1.1817\% \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \% u_{cB} = & [\% u_B^2 + \% u_\varepsilon^2 + \% u_L^2 + \% u_V^2 + \% u_{temp}^2 \\ & + \% u_{wl}^2 + \% u_{pH}^2 + \% u_{Absorb}^2 + \% u_{conc}^2 + \% u_{line}^2 + \% \\ & u_{lot}^2 + \% u_{aging}^2]^{1/2} = [0.23194^2 + 0.40825^2 + 0.057 \\ & 74^2 + 0.1503^2 + 0.39261^2 + 0.01386^2 + 0.01039^2 \\ & + 0.17321^2 + 0.14723^2 + 0.34642^2 + 0.86605^2 + \\ & 0.28868^2]^{1/2} = 1.1857\% \end{aligned}$$

因此, $U_A = 221.66 \times 1.1817\% \times 2 \approx 5.2$ U/L ($k=2$), 故标本 A 的测量结果表示为 (221.7 ± 5.2) U/L, 概率对称的 95% 包含区间为 $[216.5$ U/L, 226.9 U/L]; 同理, 标本 B 的测量结果表示为 (366.6 ± 8.7) U/L, 概率对称的 95% 包含区间为 $[357.9$ U/L, 375.3 U/L]。

3.4 MCM 各输入量及 PDF 的确认

3.4.1 确认各输入量 通过分析表 2, 确认影响不确定度的分量共 14 个, 分别以字母 A ~ O 表示。

3.4.2 确认各分量的分布类型 根据文献、经验确

定各分量的分布类型。

3.4.3 概率分布函数的确定 由表 2 的数据分析获得, 举例如下。

已知标本 A 的均值与标准误分别为 221.66 U/L 和 0.46669 U/L, 它们的吸光度值分别为 0.060897 和 0.00012821, 根据经验确认为正态分布, 因此标本 A 的概率分布函数表示式为 $N(0.060897, 0.00012821^2)$ 。

已知 ε 的值为 630 m²/mol/L, 其标准不确定度 $\leq 1\%$, 即 6.3 m²/mol/L, 根据经验确认为三角形分布, 其分布的下限为 623.7, 上限为 636.3, 概率分布函数表示式为 $T(623.7, 636.3)$ 。

已知光径 (L) 为 10 mm, 其标准不确定度为 0.01 mm, 根据经验确认为矩形分布, 其分布的下限为 9.99, 上限为 10.01, 概率分布函数表示式为 $R(9.99, 10.01)$ 。

已知温度不是数学模型的输入量, 但它的不确定度影响测量结果, 温度的标准不确定度 ≤ 0.10 °C, 它的灵敏系数为 6.8%/°C, 在 0.1 °C 时为 0.68%, 根据经验确认为矩形分布, 在酶活性浓度为 1U/L 时, 其分布的下限为 0.9932 U/L, 上限为 1.0068 U/L, 概率分布函数表示式为 $R(0.9932, 1.0068)$ 。

3.4.4 列表 将各个分量的详细信息列表, 见表 2。

表 2 数学模型中各分量的详细信息表

输入量	变量代号	量值	不确定度	函数分布类型	概率分布表示	
$\Delta A/\Delta T$	标本 A	A	0.060897 s ⁻¹	0.21054%	正态分布	$N(0.060897, 0.00012821^2)$
	标本 B	A	0.100714 s ⁻¹	0.23194%		$N(0.100714, 0.00023360^2)$
ε	B	630 m ² /mol	< 1.00%	三角分布	$T(623.7, 636.3)$	
L	C	10 mm	0.01 mm	矩形分布	$R(9.99, 10.01)$	
V_{R1}	D	1991.44 μL	2.5376 μL	正态分布	$N(1991.44, 2.5376^2)$	
V_{R2}	E	199.08 μL	0.3230 μL	正态分布	$N(199.08, 0.3230^2)$	
V_S	F	99.88 μL	0.1003 μL	正态分布	$N(99.88, 0.1003^2)$	
$temp$	G	1	0.1	矩形分布	$R(0.9932, 1.0068)$	
wl	H	1	0.3 nm	矩形分布	$R(0.99976, 1.00024)$	
pH	I	1	0.01	矩形分布	$R(0.99982, 1.00018)$	
$absorb$	J	1	0.30%	矩形分布	$R(0.997, 1.003)$	
$conc$	K	1	1.50%	矩形分布	$R(0.99745, 1.00255)$	
$line$	L	1	0.60%	矩形分布	$R(0.994, 1.006)$	
lot	N	1	1.50%	矩形分布	$R(0.985, 1.015)$	
$aging$	O	1	0.50%	矩形分布	$R(0.995, 1.005)$	

3.5 确定 MCM 的试验次数 根据经验将 MCM 试验次数 M 值定为 10^6 。

3.6 MCM 各分量的软件输入及各输入量 PDF 的传递 用于 MCM 运算的软件主要有 MATLAB 软件和

电子表格, 将表 3 中列出的相关的量, 按软件的要求输入相关程序。

3.7 结果 MATLAB 软件运算可得到与 GUM 法几乎完全一致的结果。 $\bar{x}_A = 221.664$ U/L, $S_A = 2.6173$

U/L, $\bar{x}_B = 366.597$ U/L, $S_B = 4.3433$ U/L。故标本 A 的测量结果表示为 (221.7 ± 5.2) U/L, 概率对称的 95% 包含区间为 $[216.5$ U/L, 226.9 U/L]; 同理, 标本 B 的测量结果表示为 (366.6 ± 8.7) U/L, 概率对称的 95% 包含区间为 $[357.9$ U/L, 375.3 U/L]。

4 小结

医学检验测量结果的互认是我国各级政府解决群众看病难、看病贵的重要措施, 而测量结果的溯源、方法学确认和测量不确定度的评定, 又是结果互认的基础。近年来随着我国参考测量系统研究的逐步深入, 不确定度评定的方法学研究越来越受到重视。长期以来基本上都是按照 GUM 的原理和方法评定不确定度, 但该法在某些情况下存在着一定的缺陷, 所得结果往往是近似值。MCM 不但可弥补这些缺陷, 其计算过程更为简便迅速, MCM 将可能逐步取代 GUM 法。但 MCM 的不确定度合成依据概率密度函数进行传播, 对于检验人员来说, 理解其评定原理和方法存在极大困难, 至今尚未见国内、外用于医学检验的有关报道。我们已初步建立了 MCM 用于评定参考测量程序测量结果不确定度的方法, 其他相关应用研究将会陆续报道。

5 参考文献

[1] JCGM/WG1. Evaluation of measurement data - Guide to the expression of uncertainty in measurement [M]. 1st Edition. 1993.

[2] Risholm P, Fedorov A, Pursley J, *et al.* Probabilistic non-rigid registration of prostate images: modeling and quantifying uncertainty [J]. Proc IEEE Int Symp Biomed Imaging, 2011;553-556.

[3] Ebbert MTW, Bastien RRL, Boucher KM, *et al.* Characterization of uncertainty in the classification of multivariate assays: application to PAM50 centroid-based genomic predictors for breast cancer treatment plans [J]. J Clin Bioinform, 2011, 1;37.

[4] Demarco JJ, Chetty IJ, Solberg TD. A Monte Carlo tutorial and the application for radiotherapy treatment planning [J]. Med Dosim, 2002, 27(1):43-50.

[5] Jiang SB, Pawlicki T, Ma CM. Removing the effect of statistical uncertainty on dose-volume histograms from Monte Carlo dose calculations [J]. Phys Med Biol, 2000, 45(8):2151-2161.

[6] Gonzalez A, Herrador M. Evaluation of measurement uncertainty in analytical assays by means of Monte Carlo simulation [J]. Talanta, 2004, 64(2):415-422.

[7] Ferreo A, Salicone S. A Monte Carlo-like approach to uncertainty estimation in electric power quality measurements [J]. The International Journal of Computation and Mathematics in Electrical and Electronic Engineering, 2004, 23(1):119-132.

[8] Siebert B, Sommer K. New development of the GUM and Monte Carlo techniques [J]. Technisches Messen, 2004, 71(2):67-80.

[9] 刘智敏. 用 MC 仿真计算不确定度 [J]. 中国计量学院学报, 2005, 16(1):1-7.

[10] JCGM. Guide to the expression of uncertainty in measurement (GUM) Supplement 1: Numerical methods for the propagation of distributions. 2004.

[11] GUIDE 98-3/SUPP.1. Uncertainty of measurement- Part3 /Supplement 1: Propagation of distributions using a Monte Carlo method [M]. ISO/IEC, 2008.

[12] ISO Guide 35: Reference materials-General and statistical principles for certification [M]. 2006.

[13] Eurachem/Citac Guidelines. Quantifying uncertainty in analytical measurement [M]. 2nd edition. 2012.

[14] 张海滨, 王中宇, 刘智敏. 测量不确定度评定的验证研究 [J]. 计量学报, 2007, 28(3):193-197.

[15] 崔伟群, 杭晨哲. 基于蒙特卡罗方法评定不确定度中相关随机变量模拟 [M]. 现代测量与实验室管理, 2010, (4):25-27.

[16] 张圣勤. MATLAB 7.0 实用教程 [M]. 北京: 机械工业出版社, 2006.

(收稿日期: 2012-08-31)

(本文编辑: 王海燕, 陈维忠)